ziemlich rasch verschwand. Keine Feder wäre im Stande die Farbenpracht dieser im Abendroth erglänzenden Wolke zu schildern, von deren Reflex die ganze Umgebung rosenroth bis ins Röthlichgelbe übergehend erleuchtet war, ebenso wenig konnte Einer der noch übrigen Anwesenden sich entsinnen, je ein ähnliches Farbenspiel an einer so niedrig über dem Horizonte schwebenden Wolke gesehen zu haben. Ungefähr 15 Minuten nachher senkten sich auch die Nebel im Hintergrunde des Sees und die 1800 bis über 2200 Meter hohen Felsmassen erschienen mit ihren Schneeflecken ebenfalls in der Farbe des schönsten Abendrothes. Die Atmosphäre blieb hierauf bis um 10 Uhr 30 Minuten Abends vollkommen heiter.

Über die Unzukömmlichkeiten gewisser populärer Anschauungsweisen in der Undulationstheorie und ihre Unfähigkeit das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer zu ersetzen.

Von dem w. M., Prof. Jos. Petzval.

(Fortsetzung.)

(Vorgetragen in der Sitzung am 1. Juni 1852.)

Ich habe in der Sitzung vom 21. Mai l. J. von einem doppelten Irrthume gesprochen, der in gewissen populären Anschauungsweisen der Undulationstheorie enthalten ist, und auf die Nothwendigkeit hingewiesen, bei der Darstellung von Erscheinungen, in denen sich strömende und schwingende Bewegungen compliciren, von einer Theorie Gebrauch zu machen, wie die von mir in der Sitzung vom 15. Jänner d. J. aufgestellte, deren erste Frucht ein Naturgesetz war, für welches ich den Namen: **Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer** vorschlug. Gegen diese Theorie erhoben zwei meiner hochgeehrten Herren Collegen im gegenseitigen Einverständnisse ihre Stimmen. Da ich aber in ihren Vorträgen nichts entdecken konnte, was als ernster Angriff gegen dieselbe zu gelten vermöchte, oder sonst irgendwie zu einer tieferen Erwägung veranlassen

könnte, da ich ferner die, allerdings sehr gründlichen, unmittelbar zuvor von meinem geehrten Vorredner, dem Herrn Regierungsrathe v. Ettingshausen geäusserten Bedenklichkeiten durch die ohnehin von mir bereits versprochenen Erläuterungen beseitigen zu können glaube, da es mir endlich scheint, dass das Wesen dieser Theorie, ihr Zweck und ihr Nutzen, die Absicht, die ich mit derselben erreichen will, in Gefahr stehen unrichtig aufgefasst zu werden, sowohl von meinen Herrn Gegnern, als auch von manchem Anderen meiner Leser oder Zuhörer, so wird man mir es wohl zu Gute halten, wenn ich jetzt schon, bevor noch die gegen mich gerichteten Aufsätze gedruckt in meinen Händen sind, etwas über die Geschichte und Absicht meiner Arbeit sage, um damit zu verhindern, dass der parlamentarische Kampf um das Interesse der Wissenschaft, eine schiefe Wendung nehme.

Es geschah zu wiederholten Malen, dass die hochverehrte Classe vom Herrn Bergrathe Doppler aufmerksam gemacht wurde auf seine wissenschaftlichen Abhandlungen und namentlich auf seine Erklärung der Farben der Doppelsterne und die Verbreitung, deren sich seine Ideen erfreuten bei einem Theile des wissenschaftlichen Publikums. Ein anderer Theil war aber mit seinen Lehren keineswegs einverstanden und gewahrte darin manches Irrthümliche — ich gehöre selbst zur Zahl der Letzteren und wurde zu wiederholten Malen aufgefordert, den Doppler'schen Ansichten in der Akademie aus dem mir zustehenden Standpunkte der formellen Wissenschaft entgegenzutreten. Dass ich dies lange unterliess, weil es in dieser Körperschaft nicht bestehende Sitte war, wurde mir endlich selbst von einigen der wärmsten Verehrern der Sitte übelgenommen und theils als Mangel an Interesse für die Wissenschaft, theils auch an dem Rufe der Corporation, der ich angehöre, gedeutet. Ich sah mich daher genöthigt, die in der Undulationstheorie vorhandenen Irrthümer überhaupt einer logischen Kritik zu unterwerfen und es entstand eine Arbeit, die bereits vor mehr als Einem Jahre mehreren wissenschaftlichen Männern zur Einsicht fertig vorlag und zu deren unverzüglichen Veröffentlichung mit einigen Modificationen, ich auch aufgefordert wurde. Ich konnte mich demungeachtet dazu noch nicht entschliessen, weil meine Arbeit rein negativer Natur war und noch gar nichts Positives, die Wissenschaft Bereicherndes und zur Erklärung der Erscheinungen, zu der die irrthümlichen Ansichten dienen sollten, aber nicht dienten, wirk-

lich Dienendes enthielt. Erst als ich im Wintersemester des laufenden Jahres die Grundlehren der Undulationstheorie zum Gegenstande meiner Vorträge an der Universität machte, und bei dieser Gelegenheit auf dem schon seit lange nicht betretenen Felde wieder heimisch ward, gelang es mir, die Fundamental-Gleichungen der undulatorischen Bewegung zu gründen auf einen neuen Fudamentalzustand — den nämlich einer permanenten Strömung; hierdurch war der mir bisher noch fehlende positive Fortschritt gegeben, den ich auch alsogleich der Akademie am 15. Jänner mittheilte, gesonnen, in einer folgenden Sitzung noch einige Bemerkungen dazu zu liefern und meinen Angriff auf die Irrthümer, der, wenn man meine Analysis willig auszubeuten angefangen hätte, auch ganz überflüssig geworden wäre, zu unterdrücken. Der Erfolg hat meinen Erwartungen nicht entsprochen: man hielt meine Analysis für unnütz, offenbar voraussetzend, dass die vorhandenen Anschauungsweisen den Zweck wenigstens ebenso gut erreichen, ja sie wurde möglicherweise sogar als irrig bezeichnet. Es war daher nöthig, die Irrthümer in den bestehenden Ansichten direct anzugreifen und, durch die gewonnene Überzeugung von der Unzulänglichkeit derselben, die Nothwendigkeit einer wissenschaftlicheren Behandlung des Gegenstandes, der meinigen, oder einer ähnlichen, zur Geltung zu bringen.

Es ist nun aber so eine missliche Sache um einen Angriff; er wird nur zu gerne mit persönlicher Feindseligkeit verwechselt, nur zu gerne als rein destructiv, also den conservativen Tendenzen der Wissenschaft entgegengesetzt, aufgefasst. Ich finde daher für nöthig, um, insoweit es von meiner Seite möglich ist, einer etwaigen Ausartung des allerdings sehr interessanten Schauspiels: einer wissenschaftlichen Controverse im Schoose der Akademie, im Vorhinein vorzubeugen, folgende fünf Dinge zu erklären:

Erstens: Jeder Angriff von meiner Seite ist nur gegen die Sache, d. h. gegen den Irrthum gerichtet, nicht gegen die Person und ich werde, wie bisher, das Nennen eines Namens stets vermeiden, es sei denn, dass irgend ein Gegner sich als Inhaber selber meldet — dann wäre dies offenbar unnütze Affectation. So wissen Sie z. B. von meinem geehrten Gegner, Herrn Doppler selbst, dass ich diejenige Theorie, die seiner Abhandlung: „Über das farbige Licht der Doppelsterne" zu Grunde liegt, zum Gegenstande meines Angriffs gemacht habe, wobei mich aber keineswegs das Gefühl der Feindselig-

keit gegen denselben beseelt, sondern vielmehr das der Dankbarkeit; denn eben die Irrthümer, die in seiner Abhandlung niedergelegt sind, haben mich zum tieferen Nachdenken über den Gegenstand angeregt; ihm verdanken wir also, in gewisser Weise, das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer, wenn es überhaupt Dank verdient. Ich habe es stets, wie ohnehin mehrere aus dieser hochgeehrten Gesellschaft wissen, für eine Pflicht des ritterlichen Anstandes gehalten, diese Gerechtigkeit meinem Gegner widerfahren zu lassen.

Zweitens: Wenn ich auch gewisse Analogien, von welchen mancher wackere Lehrer in seinem Lehrbuche Gebrauch gemacht hat, zum Gegenstande meines Angriffs mache, so kommt es mir doch keineswegs in den Sinn, diese dem Unterrichte rauben und etwa durch Differential-Gleichungen ersetzen zu wollen; im Gegentheile ich würde es für eine fürchterliche Misère halten, wenn man Maurer- und Zimmermanns-Lehrlinge zu $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ zwingen wollte; und eben damit dies nicht geschehe erhebe ich meine Stimme. Denn es gibt oft kein anderes Mittel gewisse Dinge zu erhalten, als sie anzugreifen, oder, genauer gesprochen, den Missbrauch anzugreifen, der mit ihnen getrieben wird. Es soll also keine der bereits nützlich gewordenen Analogien irgend mit Untergang bedroht werden; sie sollen vielmehr fortbestehen innerhalb derjenigen Grenzen, die ich näher bezeichnen will, innerhalb welcher sie wirklich der Wissenschaft die erspriesslichsten Dienste leisten, und ein Lehrer der Physik wird sich durch meine Untersuchungen höchstens bewogen fühlen geringfügige Änderungen an einige Stellen seines Werkes anzubringen und seine Schüler in stetem, regen Bewusstsein zu erhalten, dass eine Analogie eben nur eine Analogie, folglich nur ein wissenschaftlicher Witz sei, der nicht *au pied de la lettre* zu nehmen und nicht über die Grenzen seiner Wirksamkeit auszudehnen ist, weil er sonst, wie jede Ähnlichkeit, zu hinken anfängt — *similitudo claudicat.*

Drittens: Wenn meine Untersuchungen, eben darum, weil sie Analogien, d. h. wissenschaftlichen Witz zum Gegenstande haben, zuweilen den Anstrich des letzteren bekommen sollten, was bei der Natur der gegenwärtigen Sache nicht ganz und gar zu vermeiden sein wird, so glauben Sie desshalb nicht, ich wolle Sie durch witzige Vorträge amüsiren — im Gegentheile, nehmen Sie an, dass unter einem jeden Gleichnisse, das Sie in meinem Vortrage gewahren und

das grösstentheils schon gegeben ist und nicht von mir herrührt, ein mehr oder weniger tiefer Strom ernster Gedanken und klarer Begriffe fliesse — Eine nähere Untersuchung wird Sie, hoffe ich, von der Richtigkeit dieser Annahme überzeugen. Meine Vorträge über diese Gegenstände sollen zwar anzuhören sein, denn verständlich zu sein im möglichst grossen Kreise halte ich für meine Pflicht, sie sollen aber, wie bisher, mehr zum Lesen sein, als zum Hören, und mehr zum Studiren, als zum Lesen.

Viertens: Ich trete gegenwärtig eigentlich nur als Vertheidiger meiner Analysis auf, und wenn ich als solcher die ihr gegenüberstehenden Ansichten anzugreifen genöthigt bin, so ist dies keineswegs meine Schuld, sondern vielmehr die meiner Gegner, welche mich in der, der Natur der Sache nach mir zustehenden Rolle des Vertheidigers nicht gewähren liessen, indem sie meine Theorie mit einem bisher nicht ausgeführten Angriffe bedrohten. Gegenwärtig aber wird es an mir sein, die geäusserten Bedenklichkeiten des Herrn Regierungsrathes von Ettingshausen, die ich übrigens auch für keinen Angriff halte, nachdem sie keinen Punkt meiner Theorie als irrig, sondern nur als unerwiesen bezeichnen, zu heben.

Fünftens: Ich habe demungeachtet gar nichts dawider, ja es wäre mir sogar sehr lieb, wenn sich aus diesem kleinen Partialkampfe ein grösserer, langwierigerer, umfassenderer, über die Lehren der Undulationstheorie entwickeln würde, mindestens zwischen mir und dem Einen meiner verehrten Gegner, Herrn Regierungsrathe von Ettingshausen; ich würde meine Pflicht als Akademiker durch nichts vollkommener zu erfüllen glauben, als durch einen übernommenen Part in einem solchen Kampfe. Einem solchen, durchgekämpft zwischen Lagrange und Laplace, verdanken wir die erhabenste und vollkommenste aller bisher ausgebildeten Wissenschaften — die Mechanik des Himmels; — und wenn ich nun auch, wegen der überwältigenden Masse des Stoffes, nicht glauben kann, dass eine neue, vollkommen befriedigende Undulationstheorie dem Schoose unserer Akademie entsteigen werde, so werden wir doch unseren glücklicheren Nachkömmlingen, die den Vortheil haben werden, auf unseren Schultern zu stehen, den Weg zu diesem grossen Werke geebnet haben.

Nach dieser kurzen Darstellung erlauben Sie mir die auf meine Theorie Bezug habenden Äusserungen meiner Gegner ein wenig ins Auge zu fassen. Sie haben dieselbe, wiewohl Sie dagegen sprachen,

alle Beide im Grunde gar nicht angegriffen; man kann vielmehr sagen, sie hätten sich gegenseitig bekämpft. Dieses Factum verdient wohl einige Erörterung:

Herr Doppler zitirt zwar einige Stellen meines ersten Aufsatzes und äussert darüber sein Missbehagen, ohne jedoch einen darin vorfindigen Irrthum aufzudecken, oder zu widerlegen. Bei einem von mir zur Erläuterung des Princips der Coexistenz der kleinsten Schwingungen angeführten Beispiele eines schwingenden Pendels, dessen Linse ein tönender Körper ist, äussert er nur die Meinung, dass dieses im Hingehen einen gewissen, im Zurückgehen einen andern Ton schwingen werde. Eine solche Behauptung, ohne Mass und Beweis, kann aber weder als Angriff noch als Vertheidigung gelten. Sollte jedoch die in der Abhandlung: „Über das farbige Licht der Doppelsterne" aufgestellte Theorie, als das Mass der Erhöhung und Vertiefung des Tones liefernd, angegeben werden, so ist diese Theorie, wegen des doppelten darin enthaltenen Irrthumes, den ich in meinem letzten Vortrage nachgewiesen habe, unrichtig. Überdem, wenn diese Behauptung als Angriff gelten soll, so ist sie mindestens kein Angriff auf meine Theorie, sondern eher einer gegen das vornehmste Bollwerk der Undulationstheorie: das Princip der Coexistenz der kleinsten Schwingungen, welches ich nicht erbaut habe, sondern ein grosser, längst verstorbener Mathematiker. Es wäre daher ein Missgriff von mir, wenn ich allzu hitzig zum Entsatze des nicht einmal noch bedrohten Principes herbeieilte. Mit den leichten Calibern der Elementar-Mathematik schiesst man darin keine Bresche, und sollte vielleicht der Herr Regierungsrath von Ettingshausen mit dem schweren Geschütze der höheren Analysis anrücken, die von mir zurückgelassenen $\Delta\xi^2$, $\Delta\eta^2$, $\Delta\zeta^2$ in Rechnung ziehend, so habe ich zur Vertheidigung noch Zeit genug — ich lasse also immerhin die Laufgräben eröffnen.

Weiter behauptet Herr Doppler: das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer könne zu Irrthümern verleiten, da er aber nicht sagt, zu welchen, so ist dies auch kein Angriff.

So wie aber in seinem Vortrage kein Angriff auf meine Theorie liegt, so liegt darin auch keine Vertheidigung seiner Ansicht, denn die Phrase: „jetzt sei er mehr als je von der Richtigkeit seiner Ansichten überzeugt" hat auf gar keinem Felde auch nur die mindeste Beweiskraft und auf dem der Wissenschaft, gegenüber der umständ-

lichen Nachweisung der in seinen Ansichten enthaltenen Irrthümer, die allergeringste, und wenn Herr Doppler behauptet: es sei nicht einmal nöthig Experimente anzustellen, um seine Theorie zu stützen, so entgegne ich darauf ganz einfach, dass ich das auch nirgends behauptet habe, dass ich vielmehr in diesem Punkte mit ihm einerlei Meinung bin, insofern wenigstens, als kein Experiment, was auch davon der Ausgang oder das Ergebniss wäre, seine unrichtige Theorie zu einer richtigen machen würde.

Beinahe eben so verhielt es sich mit den Äusserungen des Herrn von Ettingshausen. Er ging zwar etwas tiefer ein in das wissenschaftliche Detail und sagte unter anderm: dass man die Welle nicht betrachten dürfe als das Resultat eines isolirten Impulses, sondern vielmehr als das Ergebniss unendlich vieler, aufeinanderfolgender, unendlich kleiner Impulse. Da aber diese Ansicht in meine Theorie niedergelegt und mit ihr verflochten ist, wie sich leicht nachweisen lässt, da ich ferner kurz vor seinem Vortrage in dem Meinigen der Doppler'schen Theorie selbst den Vorwurf gemacht habe, dass sie nicht nach dieser Ansicht verfahre, ja sogar durch Rechnung darthat, wie man es hätte machen sollen, um wenigstens Einem der beiden zur Sprache gebrachten Irrthümer zu entgehen, was übrigens nicht hinreicht, wenn man nicht auch den zweiten vermeidet, so sagte im Grunde der Herr Regierungsrath: dass man es so machen müsse, wie ich es gemacht habe und wie es der Herr Bergrath nicht gemacht hat. Seine Äusserung scheint daher gegen ihn und nicht gegen mich gerichtet. Er sagt zwar am Schlusse: er sei mit den Doppler'schen Ansichten vollkommen einverstanden und der obenerwähnte Weg führe zu denselben Resultaten. Wie dies Einverständniss mit dem übrigen Inhalte des Vortrages zusammenzureimen sei, liegt nicht mir ob zu erklären, sondern dürfte als Gegenstand einer nachfolgenden Discussion zu betrachten sein, in wie fern aber der angedeutete Weg der Rechnung, den auch ich im letzten Vortrage einschlug, mit den Resultaten der Doppler'schen Theorie im Einklange stehe, soll später noch erörtert werden. Es sagt ferner eben dieser mein hochgeehrter Gegner: das von mir vorgeschlagene Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer könne ohne Beschränkung ausgesprochen zu Irrthümern verleiten. In dieser Äusserung liegt, wie schon gesagt, kein wirklicher Angriff, sondern nur höchstens ein angedrohter — lassen Sie mich darüber einige Worte sagen:

Es gibt nur sehr wenige Wahrheiten, welche ganz ohne alle Beschränkung eine allgemeine ganz unbegrenzte Gültigkeit behaupten. Nehmen Sie z. B. die Kepler'schen Gesetze, etwa dieses: die Planeten beschreiben um die Sonne Ellipsen und die Sonne befindet sich in deren Brennpunkte. Dieses Gesetz ist nur richtig: wenn man der Sonne gar keine eigene Bewegung zuschreibt — erste Beschränkung; wenn kein ebenfalls anziehender Nebenkörper die Bahn des Planeten stört — zweite Beschränkung u. s. w. Eben so mit dem Principe der Coexistenz der kleinsten Schwingungen, welches durch den Umstand, dass man in der Rechnung die $\Delta\xi^2$, $\Delta\eta^2$ $\Delta\zeta^2$, vernachlässigte, zu einem nur annäherungsweise richtigen, aber desto richtigeren Satze gemacht wird, je geringer die Schwingungs-Intensität ist, daher es auch Princip der Coexistenz der kleinsten Schwingungen heisst. Solche Beschränkungen sind beinahe stets vorhanden, werden aber in den Ausdruck der Wahrheiten selbst nicht aufgenommen, sondern sind aus der Ableitungsweise jedesmal ersichtlich. Solchen Beschränkungen unterliegt auch das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer, und sie sind bei der Ableitung desselben sammt und sonders angegeben; sie verstehen sich daher von selbst; aber mein hochverehrter Gegner hat solche Beschränkungen nicht gemeint, sondern, wie mir scheint, eine wirkliche Lücke berührt, welche ich in meinem Werke: „Über die Integration der linearen Differential-Gleichungen" eben im Vortrage vom 15. Jänner l. J. auszufüllen versprochen habe. Ich werde es versuchen, zuvörderst durch Betrachtungen populärer Natur dieser meiner Zusage Genüge zu leisten.

Schlüsslich muss ich noch einiger Ausfälle Erwähnung thun, welche Herr Bergrath Doppler gegen ein Paar minder wichtige Stellen meines Vortrags gemacht hat. Am Eingange desselben befinden sich nämlich die Worte: „Man kann sagen, dass es eine grosse und kleine Wissenschaft gebe, so wie es einen grossen und kleinen Krieg gibt." Dieser Eingang erregt sein Missfallen, und er behauptet, dass es keine grosse und kleine Wissenschaft gebe, sondern dass die Wissenschaft nur Eine sei, dass Männer, wie La Place, Poisson, Gauss nicht so hochmüthig gewesen wären, eine grosse und kleine Wissenschaft zu statuiren u. s. w. Es klingt dies beinahe so, als ob er mir den Vorwurf des Hochmuthes machte. Ich setze dies nicht voraus, glaube vielmehr, dass dies nur zufällig und ohne seinen Willen so gekommen sei, ja ich würde so was gar nicht übel nehmen, wenn ich

glauben könnte, dass dies wirklich ein Angriff auf meinen persönlichen Charakter sein soll, denn ganz und gar lässt sich so etwas, wie die Erfahrung lehrt, bei einem etwas reizbaren Gegner im Kampfe selten vermeiden. Ich bin daher hier gerne nachgiebig und erkläre unumwunden, dass die Eintheilung der Wissenschaft in die grosse und kleine nichts wesentlich mit meiner Theorie Zusammenhängendes sei; wenn Herr Doppler sie nicht gelten lassen will, wie er will, ganz nach seinem Belieben, ich sehe sehr gut ein, wiewohl ich sie für wesentlich zu halten oft Gelegenheit hatte, dass hierin nicht Jeder mit mir einerlei Meinung sein muss. Es geht ja mit dem grossen und kleinen Kriege auch so, die meisten Soldaten werden sagen: was „grosser Krieg, was kleiner Krieg, Krieg ist Krieg;" für einige Wenige jedoch ist diese Eintheilung nicht nur nicht ohne Bedeutung, sondern sogar nothwendig. Sie mögen daher immerhin den Eingang betrachten lediglich als eine Redefigur, um die Aufmerksamkeit des Auditoriums zu spannen und die Langeweile, welche sehr oft im Gefolge eines tiefsinnigen Vortrages der Natur der Sache nach sich befindet, möglichst zu mildern. — Ein passender Eingang, der wenigstens nicht so ganz Gemeinplatz ist und von dem ich gerne abstehe, nachdem er seine Bestimmung erfüllt hat.

Dasselbe möge auch in Bezug auf einen am Schlusse meines Vortrages vorkommenden allegorischen Leuchtthurm gesagt sein, der nichts als ein gefälliges Schlusstableau: „Meeresstrand mit Klippen, im Hintergrunde ein Leuchtthurm" sein mag, der aber Herrn Doppler besonders missfällig ist und von dem er sagt, er sei kein Leuchtthurm, sondern ein Irrwisch. Nun, meinetwegen, so bleibt mir doch wenigstens das Verdienst, eine nützliche Anwendung der Irrwische auf Leuchtthürme gemacht zu haben; ich bestehe nicht darauf, ich übergebe ihn Herrn Doppler ohne Widerstand, er mag ihn den Errynnien weihen, oder, im trockenen deutsch: mein gewesener Leuchtthurm ist, wenn Sie wollen, kein Leuchtthurm, sondern nur eine Allegorie, oder sogar ein Irrwisch, aber das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer ist doch ein Princip.

Ein einziger fataler Umstand lässt mir indess diesen Irrwisch, mit dem ich übrigens ganz zufrieden wäre, in einigermassen irrem Lichte erscheinen. Herr Doppler sagt nämlich: ich sei auf dem von Cauchy betretenen Wege weitergegangen und hätte da — einen Irrwisch entdeckt! Was würde da Cauchy dazu sagen? Vermuthlich

Folgendes: „Euer Mann ist von der Annahme eines eigenen Urzustandes — des der permanenten Strömung — ausgegangen, hat also *ab ovo* einen andern Weg betreten, von dem man allenfalls sagen könnte, er sei nach dem Muster des meinigen angelegt, er laufe mit dem meinigen parallel, da man $u=v=w=o$ setzend auf den meinigen gelangt. Auf dem von mir betretenen Wege jedoch, ist er in keinem Falle vorgeschritten, hat er sohin ein Princip gefunden, so ist er auf seinem eigenen Wege vorwärts gegangen, hat er einen Irrwisch entdeckt, dann ist er allenfalls auf seinem eigenen Wege zurückgeschritten — auf meinem Wege findet man auch keine Irrwische, sondern überhaupt in der Regel gar nichts, denn was ich ausbeute, pflege ich auch zu erschöpfen." So würde Cauchy beiläufig sprechen, denn das kann er offenbar nicht wissen, dass die Phrase: „er ist auf dem von Cauchy betretenen Wege fortgeschritten" nicht wörtlich zu nehmen, sondern lediglich als *terminus technicus* unserer Kunst zu begutachten anzusehen sei, durch den der Begutachter zwei Dinge leise anzudeuten, so zu sagen nur zart durchschimmern zu lassen beabsichtigt, nämlich erstens: er sei auch auf dem von Cauchy betretenen Wege gewesen und zweitens: nicht bloss Cauchy, sondern auch der auf seinem Wege Gewesene hätte allenfalls Dasselbe finden können — wenn er darüber nachgedacht hätte.

Bei derselben Leuchtthurmgelegenheit war aber der Herr Bergrath so gütig mir einen guten Rath zu ertheilen, für den ich demselben um so mehr zu Dank verpflichtet bin, als man seinem Gegner selten einen solchen angedeihen lässt, ein solches Verfahren daher jedesmal ritterliche Grossherzigkeit beurkundet. Er sagt nämlich sehr treffend: es sei nicht genug einen Leuchtthurm aufzustellen, sondern man müsse auch die Klippen und Untiefen, welche die Schifffahrt gefährden, bezeichnen und zeigen, wie man daran Schiffbruch leiden könne. Nun, ich bin diesem Rathe zum Theil schon zuvorgekommen, indem ich zwei Hauptirrthümer namhaft machte, die sich in den Ansichten meines Herrn Collegen vorfinden, nämlich

Erstens: die Voraussetzung der explosionsweisen Mittheilung der Undulation an das Mittel.

Zweitens: die Voraussetzung der Unfähigkeit des Mittels an der progressiven Bewegung der Ton- oder Lichtquelle Theil zu nehmen.

Ich bitte Sie diese zwei Irrthümer als Klippe und Untiefe aufzufassen. Es wäre daher nur noch zu zeigen, wie man daran Schiff-

bruch leiden könne und hier muss ich gestehen, dass das Gleichniss ein wenig zu hinken anfange. Von einem Schiffbruche, bei welchem man mit Mann und Maus untergeht, lässt sich hier natürlich nicht sprechen, höchstens hat das, was man mit dem hochtrabenden Namen „Schiffbruch" bezeichnet, eine entfernte Ähnlichkeit mit einer Seekrankheit. Der figürliche Ocean der Wissenschaft ist kein so wilder Ocean, als der nichtfigürliche, daher es auch kommt, dass man in dem leichten Kahne der elementaren Mathematik, ohne Furcht vor Lebensgefahr, in die See stechen kann. Damit Sie aber doch einen Begriff davon bekommen, wie man diesen figürlichen Schiffbruch leide, will ich Ihnen erzählen, auf welche Weise ich selbst an diesen Klippen schiffbrüchig geworden bin:

Als ich zum ersten Male die Abhandlung über das farbige Licht der Doppelsterne zu Gesicht bekam, ging ich alsobald, von der ausnehmenden Einfachheit der Theorie etwas frappirt, zu den numerischen Anwendungen über, welche in den meisten Fällen den Probirstein der Theorie abgeben. Da ersah ich denn, dass, wenn die Tonquelle sich dem Beobachter nähert mit einer Geschwindigkeit, die gleich ist der Geschwindigkeit des Schalles, gegen denselben ein unendlich hoher Ton schreite, mit unendlich vielen Schwingungen in der Secunde und nach der entgegengesetzten Seite nur ein Ton, der die nächsttiefere Octave desjenigen ist, den die Tonquelle schwingt. Hier ward mir bereits ängstlich zu Muthe. Ja! dachte ich, wenn dieser subjective Beobachter mehr Schwingungen in einer Secunde aufbraucht, als die objective Tonquelle in Jahren liefern kann, wie wird die objective Theorie die Auslage decken? Aber schreiten wir noch weiter ins Extreme: Setzen wir voraus die Geschwindigkeit der Tonquelle sei grösser, als die Geschwindigkeit des Schalles, nun, so wird die Welle von der Tonquelle fortwährend überholt; kaum geboren, wird sie schon zurückgelassen; — ach! wie stell' ich mir das Alles vor? — welches Bild find' ich auf, um diesen Vorgang zu versinnlichen? — ich denke an die bekannte Geschichte von dem Pferde, welches so schnell lief, dass ihm sein Schatten nicht folgen konnte, ein weiser Magier fand den marodirenden Schatten und benützte ihn als Reitpferd. Diese poetische Fiction tröstet mich aber nicht, und macht mir die Sache um nichts klarer; es folgt eine unruhige Nacht, voll wirrer Träume, unaufhörlich sehe ich besagten Magier auf dem gespenstigen Schattenpferde *ventre à*

terre einhergalloppiren. Auf diese Weise verblüfft und, wie ich gestehen muss, auch ein wenig geärgert, durch die leichte Manier, mit der die schwierigsten Probleme der Undulationstheorie, ganz ohne Rücksicht auf vorhandene Strömung, Form, Adhäsion, Continuität oder Discontinuität der Masse, über einen und denselben Leisten geschlagen werden, vermittelst einer kindleichten, achtzeiligen Theorie, nehm' ich den Bleistift zur Hand, um theils die in der Ansicht ausser Acht gelassenen Umstände, in Bezug auf das Rechnungsresultat, mathematisch zu zergliedern und theils auch diejenigen Rechnungsentwickelungen höherer Art ausfindig zu machen, durch welche die Ergebnisse der Doppler'schen Theorie allenfalls vertheidigt werden könnten. Ich befreie mich vor allem andern von der Hypothese der explosionsweisen Mittheilung, diejenigen Rechnungen durchführend, von welchen ich Ihnen in meinem letzten Vortrage ein Stück mitgetheilt habe und in die sich auch Herr Regierungsrath v. Ettingshausen eingelassen zu haben scheint, da er von der Nothwendigkeit spricht, die Sache so zu behandeln und zugleich äussert: „man gelange dabei zu denselben Resultaten, zu welchen auch Herr Doppler auf seinem Wege kommt."

Wenn ich nun aber auch, eben in meinem früheren Vortrage, diese Art zu verfahren, die damals noch ganz und gar die Meine war, indem ich von der Meinung des Herrn Regierungsrathes noch gar nichts wusste, vielleicht in etwas harten Worten des Selbsttadels rügte, äussernd: dass der Mathematiker, der so was „Tonquelle" nennt, sich wie ein Taschenspieler benehme . . . . . . , so kann ich doch nicht umhin, zu bemerken, dass es die bei weitem edlere, an Resultaten reichere Analysis sei und dass ihr der Herr Regierungsrath höchlich Unrecht thue, wenn er ihre verhältnissmässig reichen Ergebnisse, mit den dürftigen und, selbst auf dem eigenen Standpunkte nicht einmal volle Richtigkeit habenden der Doppler'schen vergleicht. Denn jene von mir und ihm angedeutete Analysis ist ein wichtiger Bestandtheil der Undulationstheorie und besteht auch so lange in voller Richtigkeit, so lange der Mathematiker nur spricht wie folgt: „Setzen wir an diesem Orte des Raumes eine solche Erregung voraus"; mit dieser Erregung, so lange sie nichts weiter ist als eine analytische Fiction, kann er dann im Raume stillstehen, oder fortschreiten, stetig oder sprungweise, nach Belieben, kann Theile des Mittels oder Wellen überhüpfen und hat immer Recht;

wie er aber diese Erregung „Tonquelle" zu nennen anfängt, beginnt er höchlich Unrecht zu haben. Hier kann er die Strömung nicht mehr ignoriren, sondern muss die Tonquelle mit der Strömung gehen lassen. denn, wenn die Tonquelle mit der Strömung nicht gehen will, so geht die Strömung mit der Tonquelle. Ebenso verhält es sich mit dem Beobachter: so lange ich diesen als imaginären Punkt des Raumes auffasse, kann ich ihm jede beliebige Rolle zutheilen und kann ihn hören lassen, was ich will, so wie er aber ein wirklicher Beobachter wird, geht auch er in der Strömung und wenn er nicht will, so geht die Strömung mit ihm. Hieraus folgt, dass ich, in meiner, eine permanente Strömung zu Grunde legenden Theorie, allerdings das Recht habe, eine Erregung fortschreiten zu lassen, und auch sogar Tonquelle zu nennen, unter der Bedingung, dass Strömung und Fortschreiten in einerlei Richtung und mit einerlei Geschwindigkeit stattfinden; bei der älteren Theorie jedoch, der der Zustand des stabilen Gleichgewichts zu Grunde liegt, hat man dieses Recht nicht, sondern muss mit der Erregung stehen bleiben, wenn man sie Tonquelle nennen will. Gleichwohl ist, wie gesagt, diese Theorie, welche die Welle aus unzähligen Erregungen zusammensetzt, im Vergleich mit der Explosiven, entschieden die edlere, sie steht als integrirender Bestandtheil der meinigen da und bietet selbst analytische Schönheiten, was mich bestimmt, sie der geehrten Classe, in Bezug auf eine plane und auf eine Kugelwelle, im Anhange dieses Vortrages mitzutheilen. Sie werden daraus ersehen, dass die erwähnte Übereinstimmung der Doppler'schen Theorie mit dieser geläuterteren eine sehr geringfügige Parzelle sei. Ich nehme mir ferner vor, dieselben Probleme auch in meiner Theorie zu behandeln, Rücksicht nehmend auf die Strömung, die durch die Bewegung der Tonquelle erzeugt wird und Sie werden gewahren, dass die Resultate ganz andere, dermassen von den Doppler'schen verschiedene sind, dass man seiner Theorie und auch derjenigen, die ich durch Befreiung von der Hypothese der explosionsweisen Mittheilung aus ihr erhielt, nicht einmal den Werth einer ersten Annäherung zuschreiben kann. Im gegenwärtigen Augenblicke jedoch könnte die Mittheilung meiner Rechnungen, gegenüber der Behauptung, dass meine Theorie irrig sei, offenbar gar nichts nützen, weil man consequenterweise das Prädicat „irrig" ebenfalls darauf anwenden würde. Ich kann es daher vor der Hand nur so machen, wie es

meine Herren Gegner thun; ich wende mich, von meinen analytischen Hülfsmitteln keinen Gebrauh machend, lediglich an den gemeinen Verstand und nehme mir nur die Freiheit, denjenigen Fall herauszuheben, wo die Unterschiede etwas greller ins Auge fallen: eine schallende oder leuchtende unbegrenzte Ebene, welche in der auf sie senkrechten Richtung in Bewegung gesetzt ist. Wir wollen dasjenige, was über diesen Fall die Doppler'sche Theorie und was der gemeine Verstand sagt, einander gegenüberstellen:

Nach der Doppler'schen Theorie werden bei der Bewegung dieser schallenden Ebene die Theile des Mittels vor derselben allmählich überholt und im Rücken gelassen — der gemeine Verstand sagt: dass eine Tonquelle in Gestalt einer solchen Ebene nicht denkbar sei, welche die Theilchen des Mittels überholen und im Rücken lassen könnte und dass die Theilchen, welche sich vor der Ebene und in der Nähe oder im Contacte mit derselben befinden, durch die ganze Dauer der Bewegung dort anzutreffen sein werden.

Nach der Doppler'schen Theorie fallen die Impulse, aus denen er seinen Ton zusammengesetzt denkt, auf stets andere und andere Theilchen; sieht man aber von der explosionsweisen Mittheilung ab und betrachtet die Welle als das Resultat unzähliger Impulse, so werden nach der Doppler'schen Theorie die verschiedenen Oscillationsphasen stets an andere und andere Theilchen des Mittelpunktes tragen — der gemeine Verstand sagt: dass die Mittheilung, von der Tonquelle aus, immer nur direct stattfinden könne an die derselben beständig anliegende Schichte des Mittels; diese erhält also die ganze Schwingung und nicht bloss eine Phase derselben, die in grösserem Abstande befindlichen Theilchen aber bekommen eben dieselbe ganze Schwingung indirect durch eine Art Zwischenhandel. Hierin liegt nun ein grosser Unterschied: nach der Einen Ansicht nämlich kann eine beliebig schwingende Tonquelle jede andere, von der eigenen verschiedene Schwingungsweise an die Theilchen des Mittels übertragen, der Natur der Sache nach aber nur die eigene und keine andere.

Nach der Doppler'schen Theorie befindet sich, wenn die Geschwindigkeit, mit der die schwingende Ebene fortschreitet, jener der Fortpflanzung des Schalles in ruhiger Luft gleich oder ihr überlegen ist, vor dieser Ebene gar keine Erregung, gar keine Welle, weil jede Erregung und jede Welle, alsogleich, nachdem sie geboren

ist, auch zurückgelassen wird — der gemeine Verstand sagt: dass Erregung nothwendigerweise bei einer jeden Geschwindigkeit stattfinden müsse vor und hinter der Ebene und dass sie, wenn man nur die Zeit t genügend wachsen lässt, in beliebiger Entfernung vorne und auch rückwärts anzutreffen sein wird.

Die Doppler'sche Theorie statuirt unendlich kleine Wellenlängen und auch negative (!) — der gemeine Verstand muss sie, nach meiner Meinung, wo sie in einer Theorie erscheinen, als eine *deductio ad absurdum* auffassen.

Dieser Zwiespalt nun, in welchem nicht bloss die Doppler'sche Theorie, sondern auch die durch das Aufgeben der Hypothese der explosionsweisen Mittheilung Veredelte, mit den Ergebnissen des gewöhnlichen Verstandes geräth, überzeugt uns von der Nothwendigkeit, Rücksicht zu nehmen auf den durch die Bewegung der Tonquelle veranlassten Strömungszustand, so zwar, dass, wenn man diesen letzteren ausser Acht lässt, Resultate hervorgehen, die in keinem Falle auch nur annäherungsweise richtig sind und von den in der Natur stattfindenden Erscheinungen, also auch den Ergebnissen eines gediegenen Experimentes nothwendig himmelweit verschieden ausfallen müssen.

Meine hochgeehrten Herren Gegner haben in ihren letzten Vorträgen gesprochen von objectiv und subjectiv — ich weiss zwar nicht, was damit gemeint sein soll, das ist aber klar und jedem Leser unmittelbar ohne Mühe ersichtlich, dass die Theorie des Herrn Bergrathes Doppler von einem rein objectiven Vorgange spreche. Denn wiewohl darin ein Beobachter vorkommt, so spielt er darin doch keine Rolle; ferner habe ich in seiner Darstellung des objectiven Vorganges zwei, ebenfalls rein objective, bereits zur Sprache gebrachte Irrthümer entdeckt, die natürlich ebenfalls rein objectiver Natur sind. Ich sehe daher gar nicht ein, wie hier das Subjective zur Rettung des Objectiven beitragen soll. Überdem ist sein unendlich hoher und sein negativer Ton, subjectiv eben so gut wie objectiv, unmöglich und dies zwar was er auch für eine der Wissenschaft würdige Definition des Subjectiven geben möge.

Ich erlaube mir zum Schlusse noch ein Paar einfache Worte, welche aber doch, trotz der Bescheidenheit mit der ich sie äussere, wieder einiges Missfallen erregen werden: Einer meiner Herren Gegner will nicht zugeben, dass es eine grosse und kleine Wissen-

schaft gebe, so wie es einen grossen und kleinen Krieg gibt. Kehren wir also die Sache um und sagen wir: Wenn es auch keine grosse und kleine Wissenschaft gibt, so gibt es doch, um die Interessen der Einen und einzigen Wissenschaft, einen grossen und kleinen parlamentarischen Krieg. Der grosse geht mit logischen und mathematischen Gründen, gerade, wie ein Pfeil, auf sein Ziel los, sucht den Irrthum aufzudecken und neue Wahrheiten zu finden oder fester zu begründen — der Kleine greift Redefiguren und allegorische Leuchtthürme an. Die Folgen sind dieselben wie beim Kriege überhaupt; meine Herren Gegner erscheinen, in demselben Augenblicke als sie sich für Verbündete erklären, bereits in gegenseitigen Zwiespalt versetzt und es erscheinen auf einmal auf dem Kampfplatze drei Meinungen wo nur zwei vorhanden sein sollen. Die Theorie des farbigen Lichtes der Doppelsterne ist in sich zusammengefallen, und selbst der Rückzug nach der schönen objectiv-subjectiven Vertheidigungslinie, sohin nach dem poetischen Gebirgslande der Physiologie, gefährdet. Sollten meine hochgeehrten Herren Gegner aus diesen Thatsachen, deren Richtigkeit sie wohl selbst zu fühlen anfangen werden, nicht Anlass nehmen, fürderhin nur die Sache, mit allem derselben würdigen Ernste und allen Hülfsmitteln, die die höhere Wissenschaft bietet, zum Gegenstande ihres, nicht bloss angedrohten, sondern wirklich ausgeführten Angriffes zu machen? Ich würde meinen, dass dies den Interessen der Wissenschaft am meisten zusagen dürfte.

Ich glaube nun, den letzten Äusserungen des Herrn Regierungsrathes v. Ettingshausen zufolge, den gegenwärtigen Stand unseres Streites richtig zu erfassen, wenn ich annehme, dass meine Theorie von ebendemselben in allen wichtigen Punkten bereits anerkannt sei, dass nur einige Bedenken übrig bleiben, die ich vermittelst derjenigen Erläuterungen zu heben hoffe, welche den Gegenstand meines zweiten Vortrages, vom 21. Mai, gebildet hätten, wenn die meiner Theorie gemachten Vorwürfe mich nicht genöthigt haben würden, einen andern Weg einzuschlagen, Erläuterungen, die im Wesentlichen die Anwendungsweise meiner Theorie und ihre Tragweite betreffen.

Dann aber glaube ich, dass es erspriesslich sein werde, um den Gegenstand in das vollste Licht zu setzen, die Folgerungen, welche aus den drei verschiedenen bisher zur Sprache gebrachten Theorien:

der Doppler'schen, der durch das Aufgeben der Hypothese der explosionsweisen Mittheilung Veredelten, aber auf die hervorgebrachte Strömung nach keine Rücksicht Nehmenden, die der Herr Regierungsrath zu vertheidigen scheint, und endlich der Meinigen, die überdies auch die Strömung in Rechnung zieht, in den allereinfachsten Fällen wenigstens, hervorgehen, nebeneinander zu stellen. Ich fange damit an, die zweite derselben und das zwar in Anwendung auf die Theorie des Schalles, der in einem Mittel von gleicher Elasticität nach allen Seiten erregt ist, der Discussion zu unterwerfen. Man hat dabei nur mit einer einzigen partiellen Differential-Gleichung zu thun, die bekanntlich folgende Gestalt trägt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = s^2 \left[\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{d^2z}\right] \tag{1}$$

und der man unter andern Genüge leisten kann: Erstens durch solche Werthe von ξ, die nur x und t in sich enthalten, von y und z aber unabhängig sind, sohin in allen Punkten des Raumes, wo x denselben Werth bekömmt auch identisch dieselben sind — dies gibt plane, auf die Coordinatenaxe der X senkrechte Wellenebenen. Die Differential-Gleichung (1) nimmt unter der Voraussetzung von Solchen die einfachere Form:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = s^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

an und es lässt sich sehr leicht nachweisen, dass das allgemeine Integral mit zwei willkürlichen Functionen bestimmter Grundgrössen versehen sei und so ausschaue:

$$\xi = f(x - st) + F(x + st). \tag{2}$$

Man kann aber auch zweitens die Gleichung (1) erfüllen durch anstatt ξ gesetzte Functionen der Zeit t und des aus dem Anfangspunkte der Coordinaten zu dem Orte x, y, z im Raume geführten Leitstrahls r, welcher durch die Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3}$$

gegeben ist. Denn betrachtet man ξ zunächst als eine Function von r und nur insofern als eine von x, y, z als diese Variablen in r enthalten sind, so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = s^2\left(\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\xi}{dr}\right), \tag{4}$$

eine Gleichung, aus der die Coordinaten x, y, z herausgefallen sind und in der man sich durch unmittelbare Substitution überzeugen kann, dass sie folgendes allgemeine, mit zwei willkürlichen Functionen versehene Integral habe:

$$\xi = \frac{1}{r} f(r - st) + \frac{1}{r} F(r + st), \tag{5}$$

und diese zwei allgemeinen Integrale (3) und (5), deren Erstes Erregung in einer Ebene, das Zweite aber Erregung auf der Oberfläche einer Kugel im Raume verfolgt, wollen wir der Reihe nach vornehmen.

Wenn im Anfange der Zeit t Erregung nur in denjenigen Punkten des Raumes vorhanden ist, die in der Nähe der Coordinaten-Ebene der YZ liegen, etwa zwischen $x = -\delta$ und $x = +\delta$, unter δ eine sehr kleine Linie verstanden, so haben die Functionen $f(u)$ und $F(u)$ von der Nulle verschiedene Werthe nur für solche u, die zwischen diese sehr nahen Grenzen fallen, also zwischen $x = st - \delta$ und $x = st + \delta$, d. h. die Erregung pflanzt sich mit der Geschwindigkeit s im Raume fort, ohne dass die Dicke 2δ der erregten Schichte eine andere wird. Lässt man nun eine ganze Reihe solcher Erregungen beim Wachsen der Zeit t aufeinanderfolgen, die ihrer Intensität nach am Ende der Zeit θ dem unendlich kleinen Factor $\sin. k\theta\, d\theta$ proportional sind, so hat man eine schwingende Bewegung mit der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{k}$ vorausgesetzt. Nimmt man noch überdies an, dass eine solche periodische Erregung mit der Geschwindigkeit c im Raume längs der Axe der X fortschreite, so ist das in die Entfernung x von der Coordinaten-Ebene der YZ nach Ablauf der Zeit t fallende ξ gegeben durch folgende Formel:

$$\begin{aligned}\xi = &\int_0^t f\Big(x - c\theta - s(t-\theta)\Big) \sin k\theta \,.\, d\theta \,+ \\ &+ \int_0^t F\Big(x - c\theta + s(t-\theta)\Big) \sin k\theta \,.\, d\theta.\end{aligned} \tag{6}$$

Um die hier angedeuteten Integrationen zwischen den Grenzen 0 und t zuvörderst im ersten Bestandtheile von ξ durchzuführen, führen wir eine neue Veränderliche u ein durch die Substitution:

$$u = x - c\theta - s(t - \theta)$$

woraus:

$$\theta = \frac{x - st - u}{c - s}$$

$$d\theta = - \frac{du}{c - s}$$

und die neuen Integrationsgrenzen:

$$u_1 = x - st\,, \quad u_2 = x - ct$$

sohin:

$$\int_0^t f\Big(x - c\theta - s(t - \theta)\Big) \sin k\theta \,.\, d\theta =$$

$$\int_{x-st}^{x-ct} \frac{f(u)\,du}{s - c} \sin \frac{k}{c - s}(x - st - u)$$

und eben so:

$$\int_0^t F\big(x - c\theta + s(t - \theta)\big) \sin k\theta \,.\, d\theta =$$

$$\int_{x-ct}^{x+st} \frac{F(u)\,du}{c + s} \sin \frac{k}{s + c}(x + st - u).$$

In diesen Formeln ist s die Geschwindigkeit, mit welcher die schwingende Bewegung im Raume fortgepflanzt wird, c aber die Geschwindigkeit, mit welcher man die Erregung schreiten lässt. Wir werden nun zuvörderst s von c verschieden annehmen und dann den Fall betrachten, wo s nahe gleich c ist. Im ersteren Falle kann man, da $f(u)$ nur für sehr kleine Werthe von u merklich von der Nulle verschieden ist, und für solche u, die die sehr kleine Linie δ überschreiten, der früher gemachten Voraussetzung nach, verschwindet,

den Zusatz u unter dem Zeichen sin zu $x+st$ und $x-st$, als sehr klein und überdem höchstens die Phase ein wenig verändernd, weglassen (was für $c=s$ aber offenbar nicht erlaubt ist). Dadurch gelangt man dann zu folgendem Ausdrucke für ξ:

$$\xi = \frac{1}{s-c} \sin \frac{k}{c-s}(x-st)\int_{x-st}^{x-ct} f(u)\,du + \tag{7}$$
$$+\frac{1}{s+c} \sin \frac{k}{s+c}(x+st)\int_{x-ct}^{x+st} F(u)\,du.$$

Es sei nun zuvörderst $s>c$, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit grösser als die der Erregung, so werden, für Werthe von x, die grösser sind als st, sämmtliche Integrationsgrenzen, die in der vorliegenden Formel vorkommen, positiv und, wenn man auch nur $x=st+\delta$ wählt, sämmtlich grösser als δ, also die Functionen f und F für alle innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Werthe von u der Nulle gleich, was offenbar die Integrale selbst verschwinden macht, d. h. über die Strecke $x=st+\delta$ hinaus ist die undulatorische Bewegung noch nicht geschritten. Dort ist also zu Ende der Zeit t noch Ruhe.

Denken wir uns dagegen x negativ gewählt, und kleiner als $-st$, wenn auch nur $x=-st-\delta$, so werden wieder alle in der Formel (7) vorkommenden Integrationsgrenzen negativ, und abermals beide bestimmte Integrale der Nulle gleich, d. h. über $x=-st-\delta$, nach der negativen Seite der Coordinaten hinaus, ist die erregte schwingende Bewegung auch noch nicht gelangt, sie ist daher zwischen $x=-st-\delta$ und $x=st+\delta$ eingeschlossen. Zwischen diesen Grenzen aber und namentlich für positive Werthe von x, die kleiner sind als st, aber grösser als ct, wird der erste Theil des für ξ vorliegenden Ausdruckes (7) von der Nulle verschieden ausfallen, da von den zwei Integrationsgrenzen die untere negativ, die obere positiv ausfällt, und man wird sie ersetzen können durch $-\delta$ und $+\delta$, weil ausserhalb dieser sehr nahe aneinanderliegenden Grenzen die Function $f(u)$ verschwindet. Der zweite Bestandtheil von ξ aber bleibt der Nulle gleich, da beide Integrationsgrenzen positiv sind. Man hat daher für $x>ct$, d. h. vor der Erregungsstelle und zugleich $<st$:

$$\xi = \frac{1}{s-c} \sin \frac{k}{c-s}(x-st)\int_{-\delta}^{+\delta} f(u)\,du \tag{8}$$

oder, da offenbar das hier als Factor erscheinende Integral eine Constante andeutet, die wir mit A bezeichnen wollen,

$$\xi = \frac{A}{s-c} \sin \frac{k}{c-s} (x - st).$$

Dieser Ausdruck repräsentirt einen Ton, dem die Schwingungsdauer:

$$\tau = \frac{2\pi (s-c)}{ks},$$

die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi (s-c)}{k},$$

und die Oscillationsamplitude:

$$a = \frac{A}{s-c},$$

also die Tonstärke:

$$J = \frac{A^2}{(s-c)^2}$$

angehören, also ein desto höherer, schriller und mehr ohrenzerreissend werdender Ton, je näher c an s fällt. Man könnte allenfalls darauf ein neues Vernichtungsmittel im Kriege gründen, so eine Art Pulverdampf-Sirene als Projectil, um den feindlichen Schaaren das Trommelfell zu zersprengen — wenn man nämlich an die Theorie glaubte.

Nehmen wir dagegen $x < ct$ an und zugleich $x > -st$, so verschwindet der erste Theil des Werthes (7) von ξ und der zweite gestaltet sich von der Nulle verschieden. Man hat daher hinter dem Orte der Erregung:

$$\xi = \frac{B}{s+c} \sin \frac{k}{s+c} (x + st), \tag{9}$$

wobei Kürze halber:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F(u)\, du = B$$

gesetzt wurde. Dieser Ausdruck repräsentirt einen andern Ton, dem die Schwingungsdauer:

$$\tau = \frac{2\pi(s+c)}{ks}$$

die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi(s+c)}{k}$$

und die Oscillationsamplitude:

$$a = \frac{B}{s+c}$$

also die Tonstärke:

$$J = \frac{B^2}{(s+c)^2}$$

zukömmt, also ein tiefbrummender, gänzlich ungefährlicher Ton. Hiebei ist der Fall, wo $x = ct$, oder $x = st$ ist, oder auch $x = ct \pm \delta'$ angenommen und $\delta' < \delta$ gedacht wird, nicht in Betracht gezogen. Es erscheinen in demselben anstatt des A und B nur andere, die Schwingungsamplitude bestimmende Factoren.

Von all den hier aufgezählten Ergebnissen liefert die Doppler'sche Theorie nichts als die Wellenlänge und die Schwingungsdauer in soferne, als sie identificirt wird mit der Zeit, binnen welcher im ruhenden Mittel Eine Wellenlänge zurückgelegt wird.

Schreiten wir jetzt zur Erörterung der folgende Annahme $c > s$, d. h. untersuchen wir, was dann geschehe, wenn man die Erregung, mit grösserer Geschwindigkeit als der des Schalles im unbewegten Mittel, fortschreiten lässt. Dieselbe Form (7) ist auch für diesen Fall noch gültig, nur wird, wenn man $x > st$ sein lässt, der erste der beiden Bestandtheile von ξ nicht wie im vorigen Falle gleich Null, sondern von der Nulle verschieden ausfallen. Verschwinden wird dieser erste Bestandtheil nur für solche Werthe von x, die auch ct überschreiten, während der zweite stets gleich Null bleibt, so lange x zwischen $-st$ und $-\infty$ enthalten ist. Wir haben daher Erregung in einem grösseren Raume, nämlich zwischen $x = -st - \delta x$ und $= +ct + \delta$, vor der Erregungsstelle, für Werthe von x die $ct + \delta$ überschreiten,

wird $\xi = 0$; dort ist also keine Bewegung. Hinter derselben und zwar zwischen $x = ct$ und $x = -st$, also in dem ganzen Raume in den sich überhaupt Bewegung verbreitet hat, taucht der zweite Theil von ξ von der Nulle verschieden auf, während der erste Theil nur in einem beschränkteren Raume, von $x = st - \delta$ nämlich bis $x = ct + \delta$, von der Nulle verschiedene Werthe erhält. Nennen wir also ξ_1 und ξ_2 diese beiden Bestandtheile von ξ, so dass man:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

hat, so bedeuten dieselben alle beide schwingende Bewegungen hinter der Erregungsstelle, aber von verschiedener linearer Ausdehnung hinter derselben. Die dem ξ_1 zukommende lineare Ausdehnung ist nämlich $(c - s)t$, während die grössere, dem ξ_2 angehörige, $(c + s)t$ ist. Übrigens sind diese beiden Bestandtheile gegeben durch die zwei Gleichungen:

$$\xi_1 = \frac{A}{s-c} \; sin \; \frac{k}{c-s} \; (x - st)$$

$$\xi_2 = \frac{B}{s+c} \; sin \; \frac{k}{s+c} \; (x + st), \tag{10}$$

und es ist der Erste von ihnen dem früher erhaltenen (8) dem Zeichen nach entgegengesetzt, der Zweite aber mit dem ebenfalls bereits angeführten (9) identisch. Auch die Constanten A und B sind mit den Grössen dieses Namens, die wir schon früher kennen gelernt haben, sonst gleichbedeutend.

Zwischen den beiden Fällen $c < s$ und $c > s$ d. h. einer kleineren Geschwindigkeit der Erregungsstelle als die der Fortpflanzung des Schalles in der ruhigen Luft und einer grösseren solchen, befindet sich ein dritter mittlerer, nämlich c nahe gleich s. Unsere Formel (7) liefert für denselben einen ersten Bestandtheil von ξ, der einen unendlich hohen Ton mit unendlicher Schwingungsamplitude darstellt, was, wenn eben diese Formel auch für den angedeuteten Mittelfall zu Recht bestände, ein absurdes Rechnungsresultat zu nennen wäre. Dem ist aber nicht so, weil, wie schon erwähnt, in diesem Falle nicht erlaubt ist, den Zusatz u unter dem Zeichen sin. wegzulassen. Während daher der zweite Theil von ξ seine Form, die er in der

Formel (7) trägt, beibehält, muss der erste durch die frühere ursprünglichere ersetzt werden; man hat also für Werthe von c, die nahe an s liegen:

$$(11)\quad \begin{aligned} \xi = & \int_{x-ct}^{x-st} \frac{f(u)\,du}{s-c} \sin \frac{k}{s-c}(x-st-u) + \\ & + \frac{1}{s+c} \sin \frac{k}{s+c}(x+st) \int_{x-ct}^{x+st} F(u)\,du. \end{aligned}$$

Dieser erste Theil, den wir abermals mit ξ_1 bezeichnen wollen, kann, in zwei Theile zerlegt, auch so geschrieben werden:

$$(12)\quad \begin{aligned} \xi_1 = & \frac{1}{s-c} \sin \frac{k}{s-c}(st-x) \int_{x-st}^{x-ct} f(u) \cos \frac{ku}{s-c}\,du \\ & - \frac{1}{s-c} \cos \frac{k}{s-c}(st-x) \int_{x-st}^{x-ct} f(u) \sin \frac{ku}{s-c}\,du \end{aligned}$$

und es hängt die Beschaffenheit von ξ_1 offenbar von den beiden bestimmten Integralen ab, die in der vorliegenden Gleichung erscheinen. Zu ihren Werthen gelangt man aber durch die Berechnung des Einen Integrales:

$$E = \int_{x-st}^{x-et} f(u)\, e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}}\,du.$$

sein reeller Theil wird nämlich das eine, der imaginäre das andere von ihnen liefern. Ist nun in aller Strenge $s = c$, so wird, wegen des Zusammenfallens der Grenzen, E der Nulle gleich. Denkt man sich aber c von s, wenn auch noch so wenig, verschieden, so wird das Intervall zwischen den Integrationsgrenzen, welches $= (s-c)\,t$ ist, wenn man nur t gross genug macht, nach Belieben grösser als 2δ, d. h. als der Bereich der sensiblen Werthe von $f(u)$, ausfallen. Man wird daher, unter der Voraussetzung eines so grossen t, die Integrationsgrenzen abermals durch $-\delta$ und $+\delta$ ersetzen können, ja man wird sich darauf beschränken können, nur das zwischen den Grenzen 0 und δ genommene Integral der Betrachtung zu unterwerfen, weil, was von diesem gilt, offenbar auch auf das zwischen 0 und $-\delta$ genommene Anwendung findet. Endlich ist es klar, dass die unter dem Integralzeichen erscheinende trigonometrische

Function oder imaginäre Exponentielle bei geringem Wachsthume von u ausserordentlich rasch variire und namentlich periodisch denselben Werth wieder annehme, wenn dem u das kleine Increment $\frac{2\pi(s-c)}{k}$ zu Theil wird. Setzen wir daher:

$$\frac{\pi(s-c)}{2k} = \varepsilon,$$

so ist ε eine dermassen kleine Linie, dass man sie selbst in δ als sehr oft enthalten ansehen kann. Wir bekommen daher vermittelst Zerlegung des Integrationsintervalles δ in kleinere Intervalle ε:

$$\begin{aligned} E = & \int_0^{\varepsilon} f(u)\, e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}}\, du \\ & + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} f(u)\, e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}}\, du \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \int_{(r-1)\varepsilon}^{\delta} f(u)\, e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}}\, du, \end{aligned} \tag{13}$$

wobei:

$$(r-1)\,\varepsilon < \delta \leqq r\varepsilon$$

ist. Wäre nun r eine dermassen bedeutende Zahl, dass die Function $f(u)$ zwischen den sehr nahe liegenden Grenzen der Integration als constant angenommen werden könnte, so enthielte folgende Gleichung einen angenäherten Werth von E, der desto richtiger wäre, je stetiger die Function $f(u)$, von $u = 0$ bis $u = \delta$ fortwährend abnehmend gegen die Nulle convergirte, nämlich:

$$E = f(0)\int_0^{\varepsilon} e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}}\, du + f(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}}\, du + \dots\dots$$

oder wenn man wirklich integrirt, und sodann die reellen und imaginären Bestandtheile sondert:

$$\begin{aligned} E = & \frac{s-c}{k} \left\{ f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) - \dots \right\} \\ & + \frac{s-c}{k}\sqrt{-1} \left\{ f(0) + f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) - f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) + \dots \right\}; \end{aligned}$$

es ist also:

$$\int_0^\delta f(u)\ cos\ \frac{ku}{s-c} du = \frac{s-c}{k} \left\{ f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon) + \ldots \right\}$$

$$\int_0^\delta f(u)\ sin\ \frac{ku}{s-c} du = \frac{s-c}{k} \left\{ f(0) + f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) - f(3\varepsilon) + \ldots \right\};$$

setzt man aber lediglich voraus, dass die Function $f(u)$ im ganzen Bereiche ihrer von Null verschiedenen Werthe stetig sei, so, dass man zu ihrer Entwickelung von der Mac-Laurin'schen Formel Gebrauch machen kann, so wird man jedenfalls die Formel (13) auch so schreiben können:

$$E = f(0) \int_0^\varepsilon e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}} du + f(\varepsilon) \int_\varepsilon^{2\varepsilon} e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}} du + \ldots.$$
$$+ f'(0) \int_0^\varepsilon e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}} u\, du + f'(\varepsilon) \int_\varepsilon^{2\varepsilon} (u-\varepsilon) e^{\frac{ku}{s-c}\sqrt{-1}} du + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Begnügt man sich mit zwei Gliedern dieser Reihe, nämlich den in der vorliegenden Formel unmittelbar ersichtlichen, integrirt und sondert die reellen und imaginären Bestandtheile, so gelangt man zu folgender, den Werth von E genauer wiedergebenden Gleichung:

$$\begin{aligned} E = \quad & \frac{s-c}{k} \left[f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) - \ldots \right] \\ (14) \quad & + \left(\frac{s-c}{k}\right)^2 \left[f'(0)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - f'(\varepsilon) - f'(2\varepsilon)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + f'(3\varepsilon) + \ldots \right] \\ & + \sqrt{-1} \left\{ \frac{s-c}{k} \left[f(0) + f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) - f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) + \ldots \right] \right. \\ & \left. + \left(\frac{s-c}{k}\right)^2 \left[f'(0) + f'(\varepsilon)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - f'(2\varepsilon) - f'(3\varepsilon)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \ldots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wir stellen sie, um ihre Brauchbarkeit durch Vereinfachung zu erhöhen, unter der bereits gemachten Voraussetzung, dass r eine beträchtliche Zahl sei, in eine andere um, auf folgende Weise: Wir bemerken zuvörderst, dass je vier Glieder wie:

$$f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon)$$

zusammengezogen werden können in ein einziges, da man hat:

$$+f(0) = \quad f(0)$$
$$-f(\varepsilon) = -f(0) - f'(0)\varepsilon - f''(0)\frac{\varepsilon^2}{2} - \ldots\ldots\ldots$$
$$-f(2\varepsilon) = -f(0) - 2f'(0)\varepsilon - 4f''(0)\frac{\varepsilon^2}{2} - \ldots\ldots\ldots$$
$$+f(3\varepsilon) = +f(0) + 3f'(0)\varepsilon + 9f''(0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

also addirend:

$$f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon) = 2f''(0)\varepsilon^2 + \ldots\ldots$$

Dies gibt, für zwei der in unserer Gleichung enthaltenen Reihen, folgende Werthe:

$$f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) - \ldots$$
$$= 2f''(0)\varepsilon^2 + 2f''(4\varepsilon)\varepsilon^2 + 2f''(8\varepsilon)\varepsilon^2 + 2f''(12\varepsilon)\varepsilon^2 + \ldots$$
$$f(0) + f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) - f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) + \ldots$$
$$= f(0) + 2f''(\varepsilon)\varepsilon^2 + 2f''(5\varepsilon)\varepsilon^2 + 2f''(9\varepsilon)\varepsilon^2 \quad \ldots$$

die sich, da man nach den Grundlehren der bestimmten Integrale in erster Annäherung hat:

$$4f''(0)\varepsilon + 4f''(4\varepsilon)\varepsilon + 4f''(8\varepsilon)\varepsilon + \ldots\ldots$$
$$= \int_0^\delta f''(u)\, du = f'(\delta) - f'(0) = -f'(0),$$

kürzer auch so schreiben lassen:

$$f(0) - f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) + f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) - \ldots\ldots = -\frac{1}{2}f'(0)\varepsilon$$
$$f(0) + f(\varepsilon) - f(2\varepsilon) - f(3\varepsilon) + f(4\varepsilon) + \ldots\ldots =$$
$$= f(0) - \frac{1}{2}f'(\varepsilon)\varepsilon = f(0) - \frac{1}{2}f'(0)\varepsilon \text{ nahezu.}$$

Auf ähnliche Weise wird auch die, ebenfalls in der Gleichung (14) vorkommende Reihe:

$$f'(0) - f'(2\varepsilon) + f'(4\varepsilon) - f'(6\varepsilon) + \ldots\ldots$$

und jede ähnliche, in der die einzelnen Glieder und nicht die Gliederpaare das Zeichen wechseln, behandelt und wo man paarweise zusammennehmend erhält:

$$f'(0) - f'(2\varepsilon) + f'(4\varepsilon) - f'(6\varepsilon) + \ldots\ldots$$
$$= -2f''(0)\varepsilon - 2f''(4\varepsilon)\varepsilon - 2f''(8\varepsilon)\varepsilon - \ldots\ldots$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\delta f''(u)\,du = -\frac{1}{2}f'(\delta) + \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2}f'(0).$$

Diese Rechnungen führen nun zum folgenden, bis inclusive auf Glieder der zweiten Ordnung nach ε genauen Werthe von E:

$$E = \frac{s-c}{k} f(0)\sqrt{-1} - f'(0)\left(\frac{s-c}{k}\right)^2$$

und somit:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \int_0^\delta f(u) \cos\frac{ku}{s-c}\,du &= -f'(0)\left(\frac{s-c}{k}\right)^2, \\ \int_0^\delta f(u) \sin\frac{ku}{s-c}\,du &= \quad f(0)\ \frac{s-c}{k}\ , \end{aligned}$$

In unseren früheren Formeln erscheinen aber nicht diese zwischen den Grenzen 0 und δ, sondern die ähnlichen zwischen $-\delta$ und $+\delta$ genommenen bestimmten Integrale. Um zu diesen zu gelangen ist noch nöthig, die zwischen $-\delta$ und 0 gerechneten solchen zu den vorliegenden zuzusetzen. Man kann sie sich genau auf dem eingeschlagenen Wege verschaffen, kann sie aber auch aus den Formeln (15) ableiten, indem man einestheils bemerkt, dass die in denselben vorkommenden bestimmten Integrale ihre Werthe nicht ändern, wenn man in ihnen $f(u)$ in $f(-u)$ verwandelt, andererseits aber die beiden bestimmten Integrale:

$$\int_{-\delta}^0 f(u) \cos\frac{ku}{s-c}\,du, \quad \text{und} \int_{-\delta}^0 f(u) \sin\frac{ku}{s-c}\,du$$

durch Einführung der neuen Veränderlichen $-u$ anstatt u übergehen in:

$$\int_{-\delta}^0 f(u) \cos\frac{ku}{s-c}\,du = \int_0^\delta f(-u) \cos\frac{ku}{s-c}\,du = -f'(0)\left(\frac{s-c}{k}\right)^2,$$
$$\int_{-\delta}^0 f(u) \sin\frac{ku}{s-c}\,du = -\int_0^\delta f(-u) \sin\frac{ku}{s-c}\,du = -f(0)\ \frac{s-c}{k}\ ;$$

diese endlich zu den früheren addirt, geben die gesuchten zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ genommenen, nämlich:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} f(u)\ cos\ \frac{ku}{s-c}\, du = -2f'(0)\left(\frac{s-c}{k}\right)^2,$$
$$\int_{-\delta}^{+\delta} f(u)\ sin\ \frac{ku}{s-c}\, du = 0, \tag{16}$$

die man nunmehr in den Werth (12) von ξ_1 einzuführen hat, um für diesen Einen Theil der erregten schwingenden Bewegung, die für $s=c$, nach dem übereinstimmenden Urtheile meiner beiden Herrn Gegner, den unendlich hohen Ton geben soll, den Werth zu erhalten:

$$\xi_1 = 2\,\frac{s-c}{k^2}\, f'(0)\ sin\ \frac{k}{s-c}\,(x-st), \tag{17}$$

der allerdings einen unendlich hohen Ton, kraft des ihm als Factor anhängenden *sin.* darstellt, aber kraft des anderen Factors $\frac{s-c}{k^2}$ einen mit der Schwingungsamplitude 0 Versehenen, also mit anderen Worten gar keinen Ton. Dies ist aber auch ganz natürlich und es hätte auch der Rechnungen nicht bedurft, um zu diesem Resultate zu gelangen: die ganz populäre Überlegung genügt vielmehr, um die Überzeugung zu erringen, dass eine Erregung, kraft welcher alle möglichen Schwingungsphasen auf einmal in demselben Momente nach Einem und demselben Punkte des Raumes gelangen, alldort gar keine Bewegung zur Folge haben könne, eben, weil diese Schwingungsphasen sich aufheben, oder, wie man zu sagen pflegt, zu gar keiner Bewegung interferiren. Herr Doppler sagt zwar in seiner Theorie „Über das farbige Licht der Doppelsterne" S. 7, dass dieser unendlich hohe Ton gar nicht mehr vernehmbar sei, meint aber augenscheinlich nur wegen seiner Höhe nnd nicht darum, weil er gar nicht da ist, denn seine Theorie bietet gar kein Mittel zur Kenntniss der Tonstärke zu gelangen; diese Kenntniss ist vielmehr der Hypothese der explosionsweisen Mittheilung der Undulation an das Mittel aufgeopfert und in diesem Punkte scheint mir die Behauptung des Herrn Regierungsrathes v. Ettingshausen: dass die Resultate beider Theorien genau übereinstimmen einer Erläuterung, um nicht zu sagen Berichtigung, fähig zu sein.

Die bisherigen Rechnungen gründen sich auf die Voraussetzung eines allerdings ganz imaginären, in einer Ebene von unendlicher Ausdehnung stattfindenden und im Raume mit constanter Geschwindigkeit fortschreitenden Erregungszustandes; man könnte daher einwerfen, dass es unendliche schallende Ebenen nicht geben könne und dass die Tonquelle stets ein begrenzter Körper sei, man sohin die Erregung von einem begrenzten Theile des Raumes ausgehend annehmen müsse, wenn man zu Resultaten gelangen will, die mit der Erfahrung übereinstimmen sollen. Wir wollen daher, um diesem Einwurfe zuvorzukommen, Erregung stattfinden lassen in der Oberfläche einer mit dem Halbmesser R beschriebenen und mit der Geschwindigkeit c längs der Axe der X bewegt gedachten Kugel. Die Gleichung dieser Fläche am Ende der Zeit θ ist:

$$(x' - c\theta)^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

unter x', y', z', die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Oberfläche verstanden. Die Formel, von der wir jetzt Gebrauch machen müssen, um die, von einem, am Ende der Zeit θ von der erwähnten Kugelfläche ausgehenden, an Intensität dem $\sin. k\theta\, d\theta$ proportionalen Impulse, verursachte Bewegung im Raume zu verfolgen, ist jetzt die (5), nur wird man, weil sich dieselbe auf eine aus dem Anfangspunkte der Coordinaten beschriebene Kugel und auf die Zeit $t = 0$ als Erregungsanfang bezieht, wir aber eine Erregung am Ende der Zeit θ und zwar in einer sphärischen Fläche, die mit dem Radius R aus dem Punkte $x = c\theta$, $y = z = 0$ beschrieben ist, voraussetzen in derselben anstatt x schreiben $x - c\theta$, t verwandeln in $t - \theta$ und überdies noch den Factor $\sin. k\theta\, d\theta$ hinzufügen. Dasjenige also, was, von dem am Ende der Zeit θ stattfindenden unendlich kleinen Impulse, nach Verlauf der ferneren Zeit $t - \theta$, also im Ganzen genommen am Ende der Zeit t, an Bewegung nach dem Orte x, y, z des Raumes gelangt, ist gegeben durch die Gleichung:

$$\xi = \frac{\sin. k\theta\, d\theta}{\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2}} f\left(\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2} - s(t-\theta)\right)$$
$$+ \frac{\sin. k\theta\, d\theta}{\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2}} F\left(\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2} + s(t-\theta)\right).$$

Findet eine ganze Reihe ähnlicher kleiner Impulse statt, in verschiedenen Zeiten θ, welche sich zu dem von $\sin. k\theta$ repräsentirten

Tone mit der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{k}$ ergänzen, so hat man von dem vorliegenden Werthe von ξ nur das Integral nach θ zwischen den Grenzen 0 und t zu nehmen, um die von einer solchen wandernden Erregung herrührende Oscillationsgrösse ξ im Punkte x, y, z zu erhalten. Man wird also haben:

$$\begin{aligned}\xi = &\int_0^t \frac{\sin k\theta \, d\theta}{\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2}} f\left(\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2} - s(t-\theta)\right) \\ &+ \int_0^t \frac{\sin k\theta \, d\theta}{\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2}} F\left(\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2} + s(t-\theta)\right);\end{aligned} \tag{18}$$

die zwei Bestandtheile, aus denen ξ zusammengesetzt ist, wollen wir auch hier mit ξ_1 und ξ_2 bezeichnen, so dass:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

wird. Wir nehmen ferner an, dass der, von der Oberfläche der mit dem Radius R beschriebenen Kugel ausgehende elementare Impuls nur in einer geringen Entfernung von dieser Oberfläche nach innen und aussen merkbar sei, so sind die Functionen $f(r)$ und $F(r)$ nur zwischen den engen Grenzen $r = R - \delta$ und $r = R + \delta$, also in einer sphärischen Schichte von der Dicke 2δ, merklich von 0 verschieden und unter diesen Voraussetzungen wollen wir nun zur Integration der in der Formel (18) enthaltenen Differentialausdrücke schreiten. Wir beginnen mit:

$$\xi_1 = \int_0^t \frac{\sin. k\theta \, d\theta}{\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2}} f\left(\sqrt{(x-c\theta)^2+y^2+z^2} - s(t-\theta)\right)$$

und bemerken alsogleich, dass der allgemeinen Integration für beliebige Werthe von y und z des vorliegenden Differentialausdruckes Schwierigkeiten im Wege stehen, nach deren Überwindung wir uns um desto weniger sehnen, als wir selbst von der Unzulänglichkeit selbst dieser veredelteren Theorie überzeugt sind und die gegenwärtigen Rechnungen nur desshalb da sind, um zu einer erschöpfenden Vergleichung der drei in Rede stehenden Theorien zu dienen und zugleich alles dasjenige, was sich allenfalls aus dem Standpunkte der höheren Wissenschaft zu Gunsten der Doppler'schen Anschauungsweise sagen lässt, vorzuführen. Da nun aber diese Letztere nur von Demjenigen spricht, was in der Richtung der Bewegung der Ton-

quelle, also nach unseren Betrachtungen in der Axe der x nach vor- und nach rückwärts, vor sich gehen soll, so wollen auch wir unsere analytischen Betrachtungen dadurch vereinfachen, dass wir den Vorgang in denjenigen Punkten des Raumes nur, welche sehr nahe an der Axe der X liegen, wo also y und z sehr klein sind und $y^2 + z^2$ vernachlässigt werden kann, der näheren Erörterung unterziehen. Wir erhalten für solche Punkte:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \int_0^t \frac{\sin k\theta\, d\theta}{x - c\theta}\; f\left(x - st + \theta(s - c)\right) \\ \xi_2 &= \int_0^t \frac{\sin k\theta\, d\theta}{x - c\theta}\; F\left(x + st - \theta(s + c)\right) \end{aligned}$$

und hier wird uns das Integriren leichter gelingen. Wir führen zu diesem Behufe, den ersten dieser beiden Werthe, den von ξ_1 nämlich vornehmend, eine neue Veränderliche ein, mittelst der Substitution:

$$x - st + \theta(s - c) = R + u$$

woraus:

$$\theta = \frac{R + u - x + st}{s - c} \quad , \quad d\theta = \frac{du}{s - c}$$

folgt; die Integrationsgrenzen aber werden:

$$u' = x - st - R \quad , \quad u'' = x - ct - R$$

und somit:

$$(20)\qquad \xi_1 = \int_{x-st-R}^{x-ct-R} \frac{du}{s(x - ct) - c(R + u)}\, f(R + u) \sin k\, \frac{R + u - x + st}{s - c}.$$

In Folge der vorausgesetzten Beschaffenheit von $f(R + u)$, die nur für sehr kleine u zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ merklich von der Nulle verschieden ausfällt, kann man u, überall wo es als Zusatz erscheint, zu der in der Regel von der Nulle verschiedenen Grösse: $s(x - ct) - cR$, oder auch unter dem Zeichen $\sin$ zu $R - x + st$, letzteres aber nur wenn s nicht gleich c ist, weglassen, was sodann das Herausziehen eines von u nicht abhängigen Factors von unter dem Integralzeichen möglich macht und so zu folgendem Werthe von ξ_1 leitet:

$$(21)\qquad \xi_1 = \frac{1}{s(x - ct) - cR} \sin k\, \frac{R - x + st}{s - c} \int_{x-st-R}^{x-ct-R} f(R + u)\, du.$$

Ist jetzt von den beiden hier vorkommenden Integrationsgrenzen die untere negativ, die obere positiv, d. h. ist x enthalten zwischen $ct + R$ und $st + R$, im Falle $c < s$ ist, so wird man anstatt derselben $-\delta$ und $+\delta$ schreiben können; setzt man noch überdem:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} f(R+u)\, du = A,$$

so bekommt man folgenden, vor der Erregungsstelle und in geringerer Entfernung als $st + R$ geltenden Werth für ξ_1, nämlich:

$$\xi_1 = \frac{A}{s(x-ct)-cR} \sin k \frac{R-x+st}{s-c}; \tag{22}$$

ausserhalb dieses im Raume bezeichneten Intervalles ist aber $\xi_1 = 0$, innerhalb desselben entspricht ihm ein Ton, dessen Schwingungsamplitude:

$$\alpha = \frac{A}{s(x-ct)-cR}$$

dessen Schwingungsdauer:

$$\tau = \frac{2\pi(s-c)}{ks},$$

und die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi(s-c)}{k},$$

ist — Ergebnisse, welche den für den Fall einer fortschreitenden Erregung in einer Ebene oben abgeleiteten, ähnlich sind.

Hätten wir hingegen $c > s$, so liesse sich von den beiden Integrationsgrenzen in der Formel (21) die obere negativ und die untere positiv machen, wenn man $x > st + R$ und zugleich $x < ct + R$ annimmt. Man hat also in diesem Falle, hinter dem Körper und in kleinerer Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten als $st + R$, bis zu welcher offenbar der Schall in der Zeit t fortgepflanzt wird:

$$\xi_1 = -\frac{A}{s(x-ct)-cR} \sin k \frac{R-x+st}{s-c},$$

es wären also hier, so zu sagen, alle den Ton bestimmenden Elemente negativ geworden: ausserhalb des eben erwähnten Raumes ist aber wieder $\xi_1 = 0$.

Den zwischen den zwei betrachteten in der Mitte liegenden Fall, wo nahezu $s = c$ ist, werden wir später erörtern.

Auf dieselbe Weise behandeln wir aber auch den Werth von ξ_2 und erhalten für denselben zunächst folgenden Ausdruck:

$$\xi_2 = \frac{1}{s(x-ct)+cR} \sin k \frac{R-x-st}{s+c} \int_{x+st-R}^{x-ct-R} F(R+u)\, du;$$

er erscheint jedesmal von der Nulle verschieden für solche x, für welche die untere der beiden Integrationsgrenzen noch positiv, die obere aber negativ wird, d. h. für $x > -st - R$ und $x < ct + R$, also hinter der Erregungsstelle und in der Richtung der negativen x bis zu einer Entfernung $(s+c)t + 2R$. Für solche x wird man nämlich, mit Rücksicht auf die Function F, die Integrationsgrenzen in $+\delta$ und $-\delta$ verwandeln können und wird noch überdies:

$$\int_{+\delta}^{-\delta} F(R+u)\, du = B$$

setzend zum Werthe von ξ_2 gelangen, nämlich:

$$\xi_2 = \frac{B}{s(x-ct)+cR} \sin k \frac{R-x-st}{s+c}, \tag{23}$$

der aber, wie gesagt, nur innerhalb des früher bestimmten Raumes von der linearen Ausdehnung $(s+c)t + 2R$ in der Richtung der Axe der X gültig ist, an den Grenzen dieses Raumes selbst aber ein anderer wird und ausserhalb derselben durch 0 ersetzt werden muss. Ihm entspricht ein Ton, dessen Schwingungsamplitude:

$$\alpha = \frac{B}{s(x-ct)+cR}$$

dessen Schwingungsdauer:

$$\tau = \frac{2\pi(s+c)}{ks}$$

und dessen Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi(s+c)}{k}$$

ist, und der mit dem, unter ähnlichen Umständen bei stattfindender Erregung in einer Ebene, in Bezug auf die letzten zwei der erwähnten

drei Ton-Elemente, Schwingungsdauer nämlich und Wellenlänge, zusammenfällt und sich von demselben nur in der Amplitude a und Tonstärke:

$$J = \frac{B^2}{[s\,(x - c\,t) + c\,R]^2}$$

unterscheidet; dort war nämlich die Tonstärke constant, von x und t unabhängig, hier ist sie variabel und deutet eine Abnahme an im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der durchlaufenen Entfernungen. Der vollständige Werth von ξ sieht also so aus:

$$\begin{aligned}\xi = \frac{A}{s\,(x - c\,t) - c\,R}\, sin\ k\, \frac{R - x + s\,t}{s - c} + \\ + \frac{B}{s\,(x - c\,t) + c\,R}\, sin\ k\, \frac{R - x - s\,t}{s + c}\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Wir haben jetzt nur noch den vorerwähnten Mittelfall, denjenigen nämlich in Betracht zu ziehen, wo s von c wenig verschieden ist. Der gewonnene Werth von ξ_2 bleibt hiebei ungeändert stehen, der von ξ_1 jedoch hat desshalb eine Veränderung zu erfahren, weil man nicht mehr berechtigt ist, das u als einen sehr kleinen Zusatz anzusehen, wie wir bei seiner Berechnung gethan haben. Es scheint nicht nöthig in Bezug auf den ganz genauen Werth $s = c$ die Analyse zu befragen; hier nämlich zerstört offenbar die fortschreitende Erregung in jedem folgenden Momente dasjenige, was sie kurz zuvor in den Raum gelegt hat und setzt die in derselben liegende Bewegungsweise, also den in der Formel vorkommenden *Sinus* an die Stelle. Wir nehmen also an es sei:

$$s = c + \sigma,$$

wo σ zwar nicht 0 aber sehr klein ist. Das zwischen den Integrationsgrenzen in der Formel (20) für ξ_1 vorhandene Intervall ist nun σt und man wird das t immer so gross wählen können, dass die Dicke 2δ der erregten Schichte darin sehr oft enthalten ist. Denken wir uns überdies dem x einen Werth ertheilt, der zwischen $ct + R$ und $st + R$ fällt, etwa:

$$x = ct + R + \zeta,$$

wo $\zeta < \sigma t$, aber demungeachtet $\zeta > \delta$, etwa als ein Vielfaches dieser kleinen Linie angenommen werden kann. Unter diesen Voraus-

setzungen wird nun der Nenner des unter dem Integralzeichen erscheinenden Bruches in der Gleichung (20) für ξ_1 d. h.

$$s(x-ct)-c(R+u)=(c+\sigma)\zeta+\sigma R-cu$$

zwar sehr klein aber doch von der Nulle verschieden sein, also der Bruch selbst sowohl, wie auch das Product aus demselben in $f(R+u)$ eine stetige Function darstellen von derselben Natur wie die $f(u)$ unserer früheren Rechnung war. Zudem wird man die Integrationsgrenzen gerade wie dort $-\delta$ und $+\delta$ sein lassen können. Es finden daher die allda unter (15), (16) und (17) abgeleiteten Ausdrücke auch hier wieder Anwendung, nur wird man:

$$f\ (u)\ \text{in}\ \frac{f(R+u)}{s(x-ct)-c(R+u)},$$

$$f'\ (u)\ \text{in}\ \frac{f'(R+u)}{s(x-ct)-c(R+u)}+\frac{cf(R+u)}{[s(x-ct)-c(R+u)]^2}$$

$$f'\ (0)\ \text{in}\ \frac{f'(R)}{s(x-ct)-cR}+\frac{cf(R)}{[s(x-ct)-cR]^2}$$

umwandeln, was zu folgender Formel für ξ_1 leitet:

$$\xi_1=-2\left(\frac{s-c}{k}\right)^2\left[\frac{f'(R)}{s(x-ct)-cR}+\frac{cf(R)}{[s(x-ct)-cR]^2}\right]\sin k\frac{R-x+st}{s-c}, \tag{25}$$

die zu denselben Folgerungen berechtigt, zu welchen die (17) geführt hat, einen sehr hohen Ton nämlich mit sehr kleiner Schwingungsamplitude oder mit anderen Worten: gar keinen Ton.

Da man die hier vorausgesetzte Erregung in der Oberfläche einer Kugel sehr leicht in eine solche in der nächsten Nähe eines Punktes verwandeln kann, indem man R sehr klein voraussetzt, so liegen hier offenbar vermittelst unserer Analysis die zwei extremsten Fälle einer schallenden unbegrenzten Ebene, und eines schallenden Punktes dem Leser dargelegt vor Augen. Eine gewisse Übereinstimmung zwischen den in diesen extremsten Fällen gewonnenen Resultaten dürfte uns nun der Betrachtung aller Mittelfälle entheben, z. B. der Betrachtung eines schallerregenden unbegrenzten Cylinders, eines Ellipsoides und überhaupt einer begrenzten Fläche von anderer als sphärischer Gestalt. Wir glauben also genügende Daten zu besitzen, um zur vorläufigen vergleichenden Würdigung der beiden Theorien: der Doppler'schen nämlich und der hier vorgetragenen zu schreiten:

Der Ersteren habe ich bereits im Verlaufe dieses Vortrages zwei erwiesene, sehr wesentlich irrthümliche Voraussetzungen vorgeworfen: die der explosionsweisen Mittheilung nämlich, welche die Welle als untheilbares Individuum betrachtet, und die der Unfähigkeit des Mittels, an der progressiven Bewegung der Tonquelle theilzunehmen. Die hier vorgetragene Analysis ist frei von dem ersten dieser Irrthümer, hegt aber immer noch den zweiten. Man kann auch nicht sagen, dass die in Rechnung gezogene, von der in Bewegung gesetzten Tonquelle verursachte Strömung, auf das Rechnungsresultat und beziehlich auf den Vorgang der Erscheinung einen nur geringen Einfluss habe; denn es ist oben, aus ganz populären Gründen, dem gewöhnlichen Verstande entnommen, dargethan worden, dass dieser Verlauf nothwendig ein ganz anderer sein müsse, dermassen verschieden von dem durch die Doppler'sche Theorie dargestellten, dass dieser Letzteren auch nicht einmal annäherungsweise Geltung zukommen kann. Gesetzt aber auch, es wäre dem nicht so und der erwähnte Einfluss wäre wirklich unmerklich, so würde dies der Doppler'schen Theorie an Werth noch gar nichts zusetzen und der Meinigen gar nichts nehmen, denn ich verlange von einer guten Theorie, dass eine solche Einflusslosigkeit, wenn sie stattfände, aus ihr hervorgehe als wichtiger Lehrsatz, der im Range eines Principes steht. Das von mir bewiesene und auch nicht wesentlich angefochtene Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer, in Verbindung mit der von mir vorgetragenen Analysis aus der es fliesst, führt aber zu ganz anderen, mit den Doppler'schen Ansichten in keiner Übereinstimmung stehenden Resultaten; es ist daher an und für sich klar, dass es jetzt eigentlich an meinen Herren Gegnern wäre, den Mangel des Einflusses der strömenden Bewegung darzuthun, in der Weise, dass die aus ihren Anschauungsweisen gezogenen Rechnungsresultate dadurch nicht wesentlich modificirt werden; da dies nun aber unmöglich ist, weil man gegen den gesunden Verstand keinen wissenschaftlichen Beweis führen kann, so betrachte ich die Doppler'sche Theorie: „Über das farbige Licht der Doppelsterne" als abgethan, als erwiesenermassen irrig. Weil aber die hier vorgetragene veredeltere, in Bezug auf gewisse Hauptdaten, namentlich Wellenlänge und Schwingungsdauer, mit ihr in gewisser wenn auch nicht vollständiger Übereinstimmung steht, so wird eben durch diesen Umstand auch über sie der Stab gebrochen und derselbe Vorwurf

des Irrthums kann auch ihr gemacht werden. Hiermit soll aber nicht gesagt sein, dass den beiden Theorien einerlei Werth zukomme; in dieser Beziehung besteht vielmehr ein sehr wesentlicher Unterschied, der zum Theil bereits oben angedeutet worden ist, den ich aber hier noch summarisch hervorheben will:

Die Doppler'sche Theorie ignorirt die aus mechanischen Grundsätzen abgeleiteten Gleichungen, die der Undulationslehre zu Grunde liegen, und geht bloss von einer bildlichen Auffassung einiger daraus abgeleiteten Bestimmungsgrössen aus: Wellenlänge nämlich und Schwingungsdauer, deren erste sie auffasst als den Abstand zweier Dinge, die in der postulirten scharfen Abgrenzung gar nicht existiren — Impulse nämlich. Die zweite betrachtet sie als die Zeit, in welcher im ruhenden Mittel ein Raum gleich einer solchen Wellenlänge von einer Erregung durchlaufen würde. Hierdurch wird das Problem verwandelt in ein rein geometrisches, mit dem mechanischen Vorgange eines Schwingungszustandes wie er in der Natur stattfindet in gar keiner Verbindung stehendes und es gehen alle diejenigen Bestimmungsgrössen verloren, welche die der Dynamik angehörenden Rechnungsentwickelungen zu liefern ausschliesslich im Stande sind, wie: Tonstärke und Schwingungsrichtung. Daher auch die nicht vollständige Übereinstimmung der beiden in Rede stehenden Theorien. Da wo die eine einen unendlich hohen Ton sucht, findet die andere, in den zwei extremen und folglich auch in allen Mittelfällen, gar keinen. Als physikalische Theorie kann man nicht eben sagen, sie habe gar keinen Werth, weil sie den Vorgang einer Erscheinung entschieden unrichtig angibt, es muss vielmehr behauptet werden, ihr Werth sei ein negativer, weil sie so viele Anhänger der Wissenschaft zum Irrthum verleitet hat, durch eine anscheinende Einfachheit und Klarheit, die aber weiter nichts ist als Oberflächlichkeit und Mangel an Tiefe. Als analytische Methode betrachtet kommt ihr ebenfalls nicht nur gar kein Werth zu — denn was fängt der Rechner mit einer achtzeiligen auf die Lehre von den algebraischen Gleichungen des ersten Grades mit einer einzigen Unbekannten gegründeten Deduction an? — sondern man kann überdies noch beweisen, dass durch solche Darstellungsart nur Widersprüche und unklare Begriffe eingebürgert, der Unterricht verwirrt, die Mathematik als Hülfswissenschaft entwerthet, und den absurdesten Folgerungen die Thüre geöffnet werde, wie ich gelegentlich noch zu zeigen gedenke.

Nicht ganz so verhält es sich mit der hier vorgetragenen Theorie, der Hr. Regierungsrath v. Ettingshausen beizupflichten scheint; sie hat zwar ebenfalls keinen physikalischen Werth, weil sie die nie fehlende Strömung unbeachtet lässt, sie wurzelt aber fest in dem Boden der Dynamik und unterscheidet sich aus dieser Ursache schon wesentlich durch den Reichthum, der aus ihr gezogenen Bestimmungsgrössen; sie ist ferner werthvoll als analytische Methode und wenn der Physiker auch das Recht nicht hat, davon in der hier geübten Weise Gebrauch zu machen bei dem bisher üblichen zu Grunde gelegten stabilen Gleichgewichte des fortpflanzenden Mittels, so kann er es doch thun bei demjenigen Urzustande, auf welchen die von mir abgeleiteten Gleichungen gegründet sind, und hat lediglich die Bedingung zu erfüllen, dass er die Erregung mit der Strömung in gleicher Richtung und mit derselben Geschwindigkeit fortschreiten lässt und unter dieser Bedingung, wenn sie erfüllt wird, was aber nur dann geschehen kann, wenn man von meiner Theorie Gebrauch macht, hat die vorgelegte Analysis nicht bloss analytischen, sondern auch physikalischen Werth.

Schlüsslich wird es noch gut sein, wenn ich den Punkt, auf den sich gegenwärtig diese literarische Controverse befindet, mit wenigen Worten genau bezeichne, so zu sagen das Terrain, das ich bisher erkämpft und in festen Besitz genommen zu haben glaube, angebe in scharfer Begrenzung:

Wenn auch bei dem gegenwärtigen Stande dieser Streitfrage der Einfluss der progressiven Bewegung einer Ton- oder Lichtquelle auf die schwingende Bewegung als noch nicht vollständig erörtert zu betrachten ist, so ist er doch ganz gewiss nicht derjenige, dem Masse nach, und auch der Ordnung der Wirkungen nach, zu der er gehört, den die Doppler'sche Theorie angibt.